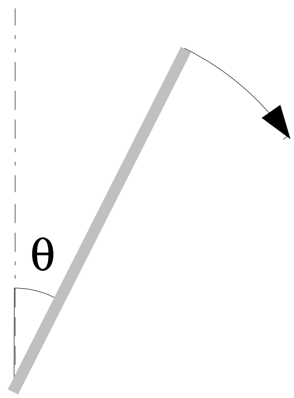


PROBLEMA 1

Un lapiz de largo ***L*** se deja caer desde la posición vertical. Su base no se desplaza en tanto que su extremo superior cae describiendo un cuarto de círculo. Calcule:

(a) Su velocidad angular, cuando forma un ángulo ***θ =60°*** con la vertical.

(b) La aceleración radial de su extremo superior

(c) La aceleración tangencial de su extremo superior

(d) ¿Para qué valor del ángulo la aceleración tangencial es igual a ***g*** ?

(a) El centro de masa se encuentra en el medio del lapiz.
Usamos la conservación de la energia, aplicada al centro de masa, para encontrar la velocidad angular:

$$U(0) + K(0) = U(\theta) + K(\theta)$$

$$mgh_{cm}(0) = m\,g\,h_{cm}(\theta) + \tfrac{1}{2} I\,\omega^2$$

$$m\,g\,L/2 = m\,g\,L/2\,\cos\theta + \tfrac{1}{2} I\,\omega^2$$

El momento de inercia de una barra rigida que rota respeto al C.M. es $I_{cm} = {}^{1}/_{12}\, m\, L^2$
pero esta vez la rotación ocurre alrededor de una extremidad.
Aplicamos el teorema de los ejes paralelos y encontramos

$$I = {}^{1}/_{12}\, m\, L^2 + m\,(L/2)^2 = {}^{1}/_{3}\, m\, L^2$$

$$m\,g\,L/2 = m\,g\,L/2\,\cos\theta + 1/6\; m\,L^2\,\omega^2$$

divido por ½ m L

$$g = g\cos\theta + 1/3\; L\,\omega^2$$

$\omega^2 = 3g / L\,(1 - \cos\theta)$ $\qquad$ $\omega = \sqrt{[3g / L(1 - \cos\theta)]}$

cuando $\theta=60$ $\qquad$ $\omega = \sqrt{(3g / 2L)}$

(b) La aceleración radial es la aceleración centripeta:

$$a_R = \omega^2\, R = (3g / 2L)\, L = 3g / 2$$

(c) La aceleración tangencial es

$$a_T = R\,\alpha = L\, d\omega/dt = L\;\tfrac{1}{2}\,[3g / L\,(1 - \cos\theta)]^{-1/2}\;\; 3g/L \sin\theta\;\; d\theta/dt \qquad \text{pero}\;\; d\theta/dt = \omega$$

$$= \tfrac{1}{2}\,[3g / L\,(1 - \cos\theta)]^{-1/2}\;\; 3g \sin\theta\;\; [3g / L\,(1 - \cos\theta)]^{1/2}$$

$$= 3g/2 \sin\theta$$

(d) $\quad g = 3g/2 \sin\theta \qquad \sin\theta = 2/3 \qquad \theta = \arcsin(2/3)$

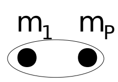
PROBLEMA 2

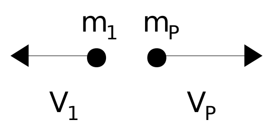
Dos astronautas se encuentran en reposo, uno frente al otro. Uno de ellos, de masa $\boldsymbol{m_1}$, lanza una pelota de masa $\boldsymbol{m_P}$ al segundo, de masa $\boldsymbol{m_2}$. Éste la recibe y la vuelve a lanzar al primero.

Despues de cada lanzamiento, la pelota tiene una velocidad $\boldsymbol{v}$ relativa al astronauta que lo efectuó.

Calcule las velocidades finales de los dos astronautas, despues que el primero recibió la pelota de vuelta.

Separemos el problema en pasos distintos. Para mantener el orden tratamos de indicar con letras negritas las cantidades despues del “choque” y normales antes. Cuando las “finales” son iniciales del choque siguiente, pierden la negrita. La rapidez relativa va cambiando de signo, si quieremos simplificar, hay que tener cuidado y cambiarle signo. Las V_C son velocidades “comunes”.

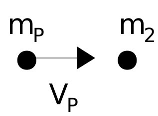


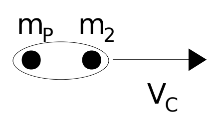


$$\upsilon = \mathbf{V}_P - \mathbf{V}_1 \qquad \mathbf{V}_P = \upsilon + \mathbf{V}_1$$

$$(m_1 + m_P)\,\cancel{v_C} = m_1 \mathbf{V}_1 + m_P \mathbf{V}_P = m_1 \mathbf{V}_1 + m_P\,\upsilon + m_P \mathbf{V}_1 = 0 \qquad (m_1 + m_P)\,\mathbf{V}_1 = -m_P\,\upsilon$$

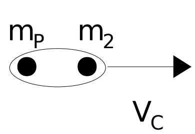
$$\mathbf{V}_1 = -\frac{m_P}{m_1 + m_P}\,\upsilon \qquad\qquad \mathbf{V}_P = \upsilon - \frac{m_P}{m_1 + m_P}\,\upsilon = \frac{m_1}{m_1 + m_P}\,\upsilon$$

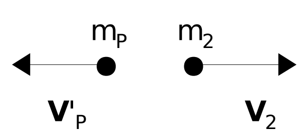




$$m_P V_P + m_2 \cancel{v_2} = (m_P + m_2)\,\mathbf{V}_C$$

$$\mathbf{V}_C = \frac{m_P}{m_2 + m_P}\,V_P = \;= \frac{m_P\;m_1}{(m_P + m_2)\,(m_1 + m_P)}\,\upsilon$$





$$-\upsilon = \mathbf{V'}_P - \mathbf{V}_2 \qquad \mathbf{V'}_P = \mathbf{V}_2 - \upsilon$$

$$(m_P + m_2)\,V_C = m_P V'_P + m_2 V_2 = (\text{substituyo } \mathbf{V'}_P) = -\,m_P\,\upsilon + m_P \mathbf{V}_2 + m_2 \mathbf{V}_2$$

$$\cancel{(m_P + m_2)}\,\frac{m_P\;m_1}{\cancel{(m_P + m_2)}\,(m_1 + m_P)}\,\upsilon = -\,m_P\,\upsilon + (m_P + m_2)\,\mathbf{V}_2$$

$$V_C\,(m_P + m_2) = \left[\frac{m_P\;m_1}{(m_1 + m_P)} + m_P\right]\upsilon$$

$$\mathbf{V}_2 = \frac{m_P\,m_1 - m_P\,m_1 + m_P^2}{(m_P + m_2)\,(m_1 + m_P)}\,\upsilon = \boxed{\frac{m_P^2}{(m_P + m_2)\,(m_1 + m_P)}\,\upsilon}$$

$$\mathbf{V'}_P = \mathbf{V}_2 - \upsilon = \upsilon \left[\frac{m_P{}^2}{(m_P + m_2)\,(m_1 + m_P)} - 1 \right] = - \frac{m_1\, m_2 + m_1\, m_P + m_2\, m_P}{(m_P + m_2)\,(m_1 + m_P)}\, \upsilon$$

$$m_1\, V_1 + m_P\, V'_P = (m_1 + m_P)\, \mathbf{V'}_1$$

$$- \frac{m_1\, m_P}{(m_1 + m_P)}\, \upsilon - \frac{m_1\, m_2 + m_1\, m_P + m_2\, m_P}{(m_P + m_2)\,(m_1 + m_P)}\, \upsilon = (m_1 + m_P)\, \mathbf{V'}_1$$

$$(m_P + m_1)\, \mathbf{V'}_1 = - \frac{m_P\, m_1\, (m_P + m_2) + m_1\, m_2 + m_1\, m_P + m_2\, m_P}{(m_P + m_2)\,(m_1 + m_P)}\, \upsilon$$

$$\boxed{\mathbf{V'}_1 = - \frac{m_P\, m_1\, (m_P + m_2) + m_1\, (m_P + m_2) + m_2\, m_P}{(m_P + m_2)\,(m_1 + m_P)^2}\, \upsilon}$$

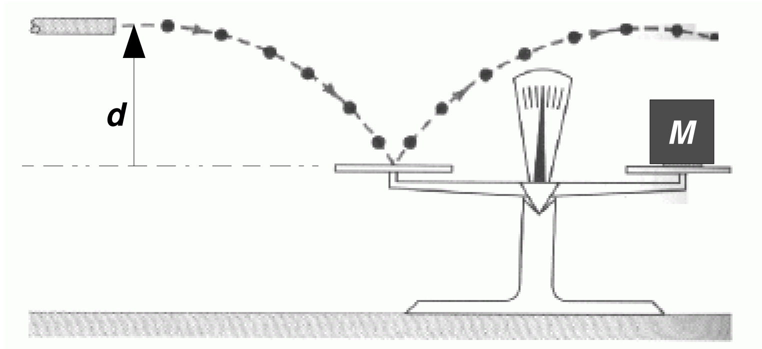
PROBLEMA 3

(a) Una pelota, lanzada horizontalmente por un cañon, cae una altura ***d*** antes de chocar de forma elástica contra un plano horizontal. Calcule la variación de su momentum lineal.

(b) Si el choque con el plano dura ***0.1s***, ¿cuál es la fuerza que la pelota ejerce sobre el plano?

(c) El cañon de la figura dispara ***100*** pelotas al segundo, y esas caen una altura ***d*** antes de chocar con el plano de una balanza. Si cada pelota tiene masa ***m***, ¿qué masa ***M*** hay que poner sobre el otro plano de la balanza para mantenerla en equilibrio?

[Ignore eventuales pequenas obscilaciones de la balanza]



(a) La velocidad vertical inicial es negativa, y la final es positiva. Por la conservación de la energia cinetica (choque elastico) el modulo es igual. Por lo tanto:

$$\Delta p = -mv - mv = -2mv$$

La velocidad v se puede calcular de la conservación de la energia:

$$mgh = \frac{1}{2} m v^2 \qquad v = \sqrt{2gd}$$

$$\Delta p = -mv - mv = -2m\sqrt{2gd}$$

(b) Usamos la definición de impulso como variación de momentum lineal

$$F \Delta t = \Delta p$$
$$F = \Delta p / 0.1 = 10\, \Delta p = -20m\sqrt{2gd}$$

(c) Ahora el cañon dispara 100 pelotas al segundo, entonces

$$\Delta t = 1/100 = 0.01 \text{ s}$$
$$F = \Delta p / \Delta t = -2mv / 0.01 = 200\, m\sqrt{2gd}$$

Esta es la fuerza que tiene que ser compensada por la fuerza peso de la otra masa:

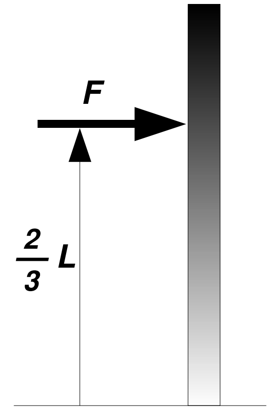
$$M = F / g = 200\, m\sqrt{2d/g}$$

PROBLEMA 4

Una barra de longitud ***L*** es golpeada (fuerza ***F***) en un punto a distancia ***y=2/3 L*** , medido desde ***y=0***.

La densidad lineal de la barra es $\boldsymbol{\lambda = ay}$ con ***a***=constante.

¿Cuál es la velocidad angular con respecto al centro de masa con que sale la barra?



Calculemos la posicion del centro de masa:

$y_{cm} = 1/M \int y\, dm$ con el integral calculado entre 0 y L

como dm es variable con y : dm=aydy

$y_{cm} = 1/M \int y\, (a\, y\, dy)$

$= a/M \int y^2\, dy$

$= a\, /\, 3M\ L^3$

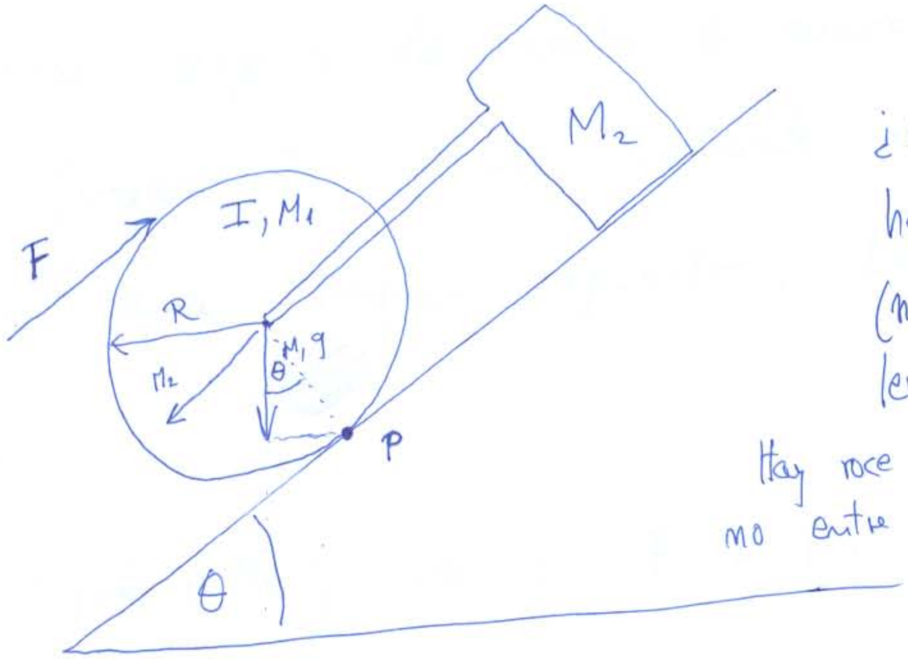
La masa total es

$M = \int dm$ [entre 0 y M] $M = \int a\, y\, dy = a/2\ L^2$

entonces

$y_{cm} = a/3M\ L^3 = 2/3\ L$

Puesto que la fuerza se aplica justo en el C.M. no hay torque y por lo tanto $\omega = 0$



¿Que fuerza F hay que aplicar (mínima) para poder levantar el sistema?

Hay roce en el punto P, pero no entre M_2 y la rampla

Para poder subir la fuerza F debe anular los torques producidos por la gravitación. Hay dos torques con respecto del punto P

(i) El peso de la rueda en el centro de masa

(ii) La componente paralela al suelo del peso de M_2 : $M_2 g \sin\theta$

Torque total:

$$\tau = -F\,2R + M_1 g R \sin\theta + M_2 g \sin\theta\, R$$

$$\tau = 0 \Rightarrow \quad F = \frac{1}{2}\left(M_1 \sin\theta + M_2 \sin\theta\right) g$$

$$= \frac{1}{2}\sin\theta\,(M_1 + M_2)\, g$$

Nota: esta es la mitad de la fuerza necesaria para mantener un objeto M_1+M_2 arriba. La otra mitad la hace el suelo en el punto P.

Otra solución:

con respecto del centro de masas

La fuerza F y el contacto con el piso F' hacen torques opuestos. Las ecuaciones son:

$$M_1 g \sin\theta + M_2 g \sin\theta = F + F' \quad : \quad \text{balance de fuerzas}$$

$$F R - F' R = 0 \quad : \quad \text{balance de torques}$$

Entonces,

$$F = F'$$

y

$$\boxed{F = \frac{1}{2}(M_1 + M_2)\, g \sin\theta}$$

La velocidad de m_1 después del primer lanzamiento es

$$m_1 v_1' + m_p v_p = 0 \qquad v_p = v$$

v es conocido y entonces

$$v_1' = -\frac{m_p}{m_1} v .$$

v_1': velocidad m_1 después primer lanzamiento

La pelota llega a m_2 con velocidad v. La velocidad de ambos después del choque es

$$m_p v_p = (m_p + m_2) v_2'$$

v_2': velocidad m_2 después atajarla

$$\Rightarrow \quad v_2' = \frac{m_p v}{m_p + m_2}$$

Ahora m_2 devuelve la pelota con velocidad v respecto de su sistema, es decir con velocidad

$$v' = -v + \frac{m_p}{m_p+m_2} v$$

$$= \frac{-(m_p+m_2)+m_p}{m_p+m_2} v$$

$$= -\frac{m_2}{m_p+m_2} v$$

v': velocidad pelota de regreso

respecto del sistema en reposo. Podemos determinar ahora la velocidad final de m_2:

$$\underbrace{(m_p+m_2)v_2'}_{= m_p v} = m_p\left(-\frac{m_2}{m_p+m_2} v\right) + m_2 v_2''$$

$$\Rightarrow \boxed{v_2'' = \frac{1}{m_2}\left\{m_p + \frac{m_p m_2}{m_p+m_2}\right\} v = \frac{m_p}{m_2}\,\frac{m_p+2m_2}{m_p+m_2}} \quad : \text{velocidad final } m_2$$

Ahora calculemos la velocidad final de m_1:

$$m_1\left(-\frac{m_p}{m_1} v\right) + m_p\left(\frac{-m_2}{m_p+m_2} v\right) = (m_1+m_p)v''$$

$$v_1'' = \frac{-m_p}{m_1+m_p}\left\{1 + \frac{m_2}{m_2+m_p}\right\} v$$

$$\boxed{v_1'' = -\frac{m_p(m_p+2m_2)v}{(m_1+m_p)(m_2+m_p)}} \quad : \text{velocidad final } m_1$$